

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Institut Denis Poisson, Université de Tours

Séminaire Bourbaki du vendredi,
IHP, Paris,
17 juin 2022.

Tresses
géométriques

Mots de tresses

L'approche de
Garside

Groupes d'Artin

Monômes et
groupes de Garside

Le type sphérique

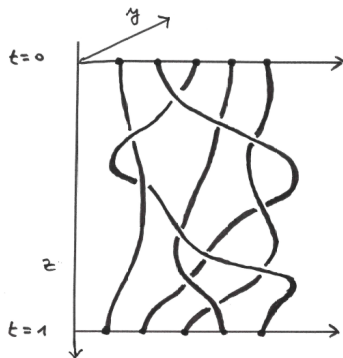
Tresses géométriques

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Soit $I = [0, 1]$, $n \geq 2$. Une *tresse géométrique* à n brins est un sous-ensemble $\beta \subseteq \mathbb{R}^2 \times I$ constitué de n espaces topologiques disjoints homéomorphes à I (appelés "brins"), tels que

- ▶ La projection $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ restreinte à chaque brin est un homéomorphisme,
- ▶ $\beta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i, 0, 0) \mid i = 1, \dots, n\}$,
- ▶ $\beta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(i, 0, 1) \mid i = 1, \dots, n\}$.



Une tresse géométrique à 5 brins.

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monômes et groupes de Garside

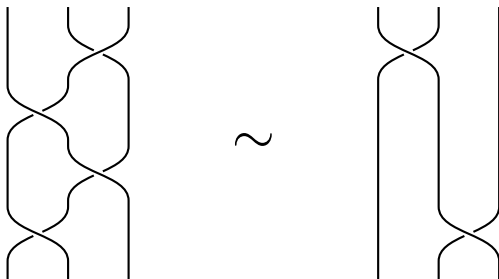
Le type sphérique

Tresses géométriques, II

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

- ▶ Deux tresses géométriques à n brins β, β' sont *isotopes* (noté $\beta \sim \beta'$) si β peut être déformée continûment en β' dans l'ensemble des tresses géométriques à n brins.



- ▶ On pose $\mathcal{B}_n = \{\text{tresses géométriques à } n \text{ brins}\} / \sim$.
- ▶ On peut définir un produit $\beta\beta'$ de deux tresses géométriques à n brins β, β' par concaténation.

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monômes et groupes de Garside

Le type sphérique

Tresses géométriques, III

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Proposition (Artin 1925)

Le produit de tresses géométriques est compatible avec la relation d'équivalence $\sim$. Il induit une structure de groupe sur $\mathcal{B}_n$.

Tresses géométriques

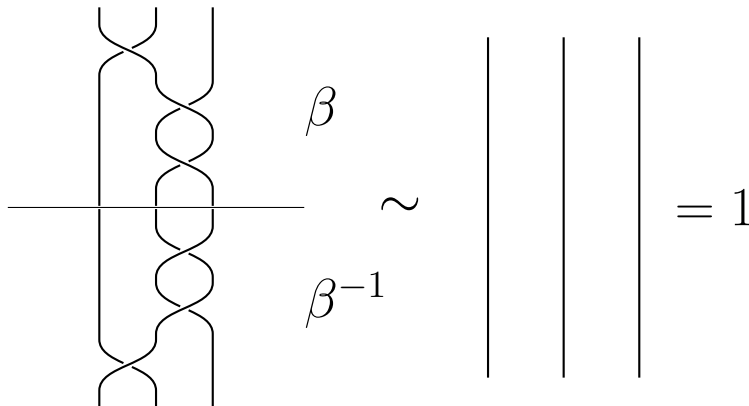
Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monômes et groupes de Garside

Le type sphérique

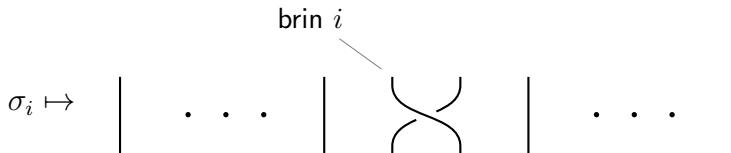


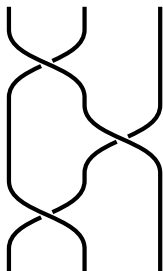
- Existe-t-il un algorithme permettant de déterminer en temps fini si deux tresses à n brins sont isotopes ?
- Posons

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ si } |i - j| = 1, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1. \end{array} \right\rangle$$

Théorème (Artin 1925)

On a $B_n \cong \mathcal{B}_n$. L'isomorphisme envoie σ_i sur la (classe d'isotopie de) la tresse où tous les brins sont verticaux sauf le $(i+1)^{\text{ème}}$ qui croise le $i^{\text{ème}}$ une seule fois (par-dessous).





$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$$

Relations de tresses

Groupes de
tresses, groupes
d'Artin, groupes
de Garside : une
introduction

Thomas Gobet

Tresses
géométriques

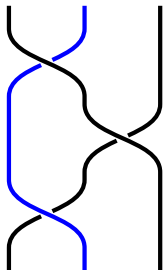
Mots de tresses

L'approche de
Garside

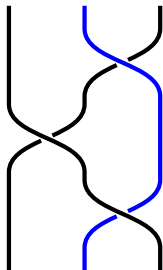
Groupes d'Artin

Monômes et
groupes de Garside

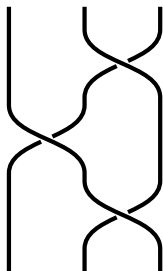
Le type sphérique



$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$$



$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$$



$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$$

- Chaque élément β de B_n possède une infinité de mots en les $\sigma_i^{\pm 1}$ qui le représente. Résoudre le problème d'isotopie des tresses dans B_n revient ainsi à résoudre le *problème des mots* dans B_n , i.e., à exhiber un algorithme permettant en temps fini de déterminer si deux mots de tresses représentent le même élément de B_n (de façon équivalente, de déterminer si un mot en les $\sigma_i^{\pm 1}$ représente la tresse triviale).

Théorème (Artin 1925, 1947)

Le groupe B_n admet une solution au problème des mots.

(idée : $B_n \cong \mathcal{B}_n$ agit sur le groupe libre $F_n = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$ par automorphismes. Cette action est

fidèle. Pour $\beta \in B_n$, il suffit alors de vérifier si $\beta \cdot X_i = X_i$ pour tout i pour déterminer si $\beta = 1$).

L'approche de Garside

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

- Le *monoïde de tresses positif* est défini par

$$B_n^+ = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ si } |i - j| = 1, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1. \end{array} \right\rangle^+$$

- Le problème des mots est trivial dans B_n^+ .

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monoïdes et groupes de Garside

Le type sphérique

Théorème (Garside 1969)

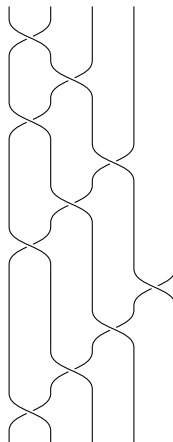
Le monoïde B_n^+ se plonge dans B_n .

(Interprétation géométrique : si deux tresses avec uniquement des croisements positifs sont isotopes, alors il existe une isotopie qui transforme l'une en l'autre sans ajouter de croisements négatifs)

- En effet, B_n^+ vérifie les *conditions de Ore* : il est simplifiable à gauche et à droite ($(ab = ac \Rightarrow b = c)$ et $(ba = ca \Rightarrow b = c)$), et toute paire d'éléments admet un multiple commun à droite/gauche. Il s'injecte donc dans son groupe de fractions, qui est de même présentation.

L'approche de Garside, II

- ▶ On peut donc écrire tout élément $\beta \in B_n$ sous la forme $x^{-1}y$ ou uv^{-1} , avec $x, y, u, v \in B_n^+$.
- ▶ En pratique : soit $\Delta = \sigma_1(\sigma_2\sigma_1) \cdots (\sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \cdots \sigma_2\sigma_1)$
- ▶ On se convainc que pour tout i , il existe $R(\sigma_i) \in B_n^+$ tel que $\Delta = \sigma_i R(\sigma_i)$.
- ▶ On a $\Delta \sigma_i \Delta^{-1} = \sigma_{n-i}$ pour tout i .
- ▶ Soit $\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \in B_n$, avec $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Si $\varepsilon_{i_j} = -1$, on remplace $\sigma_{i_j}^{-1}$ par $R(\sigma_{i_j})\Delta^{-1}$. On déplace ensuite tous les Δ^{-1} à droite.



Exemple

Soit $\beta = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1} \in B_3$. On a $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$, $R(\sigma_1) = \sigma_2\sigma_1$.
 $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1} \rightsquigarrow R(\sigma_1)\Delta^{-1}\sigma_2R(\sigma_1)\Delta^{-1} \rightsquigarrow R(\sigma_1)\sigma_1^2\sigma_2\Delta^{-2}$

L'approche de Garside, III

- ▶ Grâce à la procédure ci-dessus, on peut écrire tout $\beta \in B_n$ sous la forme uv^{-1} avec $u, v \in B_n^+$. Déterminer si $\beta = 1$ revient à déterminer si $u = v$ dans B_n^+ , ce qui devient trivial.
 $\rightsquigarrow$ solution alternative au problème des mots.

Définition

Soient $a, b \in B_n^+$. On dit que a *divise* b à gauche (ou que b est un *multiple* de a à droite) s'il existe c dans B_n^+ tel que $ac = b$. On définit de même la division à droite.

Théorème (Brieskorn-Saito 1972)

Le monoïde B_n^+ muni de la relation d'ordre $\leq_G$ (resp. $\leq_D$) induite par la divisibilité à gauche (resp. à droite) forme un treillis.

- ▶ On peut ainsi représenter tout élément $\beta \in B_n$ sous la forme d'une unique fraction xy^{-1} irréductible, i.e., où x et y sont sans facteur commun à droite.

Quelques propriétés de Δ

- ▶ L'élément Δ est le ppcm (à droite ou à gauche) des générateurs $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$.
- ▶ Les diviseurs à gauche de Δ coïncident avec ses diviseurs à droite. Ce sont les *tresses positives simples*, i.e., les tresses qu'on peut représenter par une tresse géométrique où tous les croisements sont positifs, et où deux brins distincts se croisent au plus une fois. Elles engendrent B_n et sont en bijection avec les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. On appelle un élément Δ d'un monoïde avec ces propriétés un *élément de Garside*.
- ▶ En remplaçant le système de générateurs $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ par $\text{Div}(\Delta)$, on obtient (par le même type de mécanismes) des solutions plus efficaces au problème des mots.

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monoïdes et groupes de Garside

Le type sphérique

Centre et absence de torsion

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Théorème (Chow 1948, Garside 1969)

On a $Z(B_n) = \langle \Delta^2 \rangle \cong \mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$.

- On peut étendre l'ordre $\leq_G$ (ou $\leq_D$) à B_n en imposant $x \leq_G y \Leftrightarrow x^{-1}y \in B_n^+$ (ou $x \leq_D y \Leftrightarrow yx^{-1} \in B_n^+$). On obtient ainsi une structure de treillis sur B_n .

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monômes et groupes de Garside

Le type sphérique

Théorème (Fox-Neuwirth 1962)

Le groupe B_n est sans torsion.

Démonstration.

Soit $\beta \in B_n$. Supposons que $\beta^m = 1$ pour un $m > 0$.
Considérons le ppcm P (à droite) de $\{1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{m-1}\}$.
Alors βP est le ppcm de $\{\beta, \beta^2, \beta^3, \dots, \underbrace{\beta^m}_{=1}\}$ et donc

$\beta P = P$, ce qui force $\beta = 1$.



Généralisation : les groupes d'Artin

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

- Soit Γ un graphe simple d'ensemble de sommets S , où toute arête (s, t) est étiquetée par un élément $m_{st} = m_{ts}$ de $\mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{+\infty\}$. Si s et t ne sont pas reliés par une arête on pose $m_{st} = 2$. On définit le groupe

$$W_\Gamma = \left\langle s \in S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{st} \text{ facteurs}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{ts} \text{ facteurs}} \quad \forall s \neq t \in S, s^2 = 1 \quad \forall s \in S \right\rangle,$$

où il est entendu qu'aucune relation n'est imposée entre s et t si $m_{st} = m_{ts} = +\infty$. C'est un *groupe de Coxeter*.

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monômes et groupes de Garside

Le type sphérique

Exemples

1. Si $|S| = 2$, alors W_Γ est un groupe diédral.
2. Si $\Gamma = s_1 \xrightarrow{3} s_2 \xrightarrow{3} \cdots \xrightarrow{3} s_{n-1}$, alors $W_\Gamma \cong \mathfrak{S}_n$ ($s_i \mapsto (i, i+1)$). La présentation obtenue est la prés. d'Artin de B_n avec les relations $\sigma_i^2 = 1$ en plus.

Généralisation : les groupes d'Artin, II

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

- Soit (W, S) un système de Coxeter. Le *groupe d'Artin* associé à (W, S) est le groupe B_W engendré par une copie S de S de présentation

$$B_W = \left\langle s \in S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{st} \text{ facteurs}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{ts} \text{ facteurs}} \quad \forall s \neq t \in S \right\rangle$$

- Le *monoïde d'Artin* (ou monoïde positif) B_W^+ est

$$B_W^+ = \left\langle s \in S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{st} \text{ facteurs}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{ts} \text{ facteurs}} \quad \forall s \neq t \in S \right\rangle^+$$

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monoïdes et groupes de Garside

Le type sphérique

Exemple

1. On a $B_{\mathfrak{S}_n} \cong B_n$.
2. Lorsque (W, S) est universel, i.e., lorsque $m_{st} = \infty$ $\forall s \neq t \in S$, alors B_W est isomorphe au groupe libre à $|S|$ générateurs.

Conjectures et questions (algébriques)

Conjecture

Tout groupe d'Artin B_W admet une solution au problème des mots.

Conjecture

Tout groupe d'Artin B_W est sans torsion.

Conjecture

Tout groupe d'Artin B_W avec $W = W_\Gamma$ infini et irréductible (i.e., W est infini et Γ est connexe) possède un centre trivial.

Question

Tout groupe d'Artin B_W est-il linéaire ?

Conjecture (Rouquier, 2004)

Tout groupe d'Artin est 2-linéaire.

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monômes et groupes de Garside

Le type sphérique

- ▶ Il existe des liens entre ces conjectures. La 2-linéarité implique une solution au problème des mots, tout comme la linéarité (sous de bonnes hypothèses sur le corps de base).
- ▶ L'absence de torsion et la conjecture sur le centre sont un corollaire d'une autre conjecture, la conjecture du $K(\pi, 1)$.
- ▶ En type sphérique, i.e., lorsque W est fini, toutes ces conjectures et questions sont résolues. Toutes peuvent s'obtenir par une généralisation de l'approche et des techniques de Garside...

Axiomatisation : les monoïdes de Garside

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Définition (Dehornoy-Paris 1999)

Un monoïde M est un *monoïde de Garside* si

1. M est simplifiable à gauche et à droite,
2. Il existe une fonction $\lambda : M \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ telle que $\forall a, b \in M$, $\lambda(ab) \geq \lambda(a) + \lambda(b)$ et $a \neq 1 \Rightarrow \lambda(a) \neq 0$.
3. Les ordres partiels $\leq_G, \leq_D$ induits par la divisibilité à gauche et à droite munissent M de structures de treillis.
4. Il existe un élément $\Delta \in M$ tel que l'ensemble $\text{Div}(\Delta)$ des diviseurs à gauche de Δ coïncide avec l'ensemble des diviseurs de Δ à droite, et $\text{Div}(\Delta)$ engendre M .
5. L'ensemble $\text{Div}(\Delta)$ est fini.

► ((1) et (3)) $\Rightarrow M$ s'injecte dans le groupe $G(M)$ de même présentation (conditions de Ore).

► (2) $\Rightarrow \forall a \in M, \sup\{k \in \mathbb{N} \mid a = a_1 a_2 \cdots a_k, a_i \neq 1\} < \infty$

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monoïdes et groupes de Garside

Le type sphérique

Groupes de Garside

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Définition

*Un groupe G est un **groupe de Garside** s'il existe un monoïde de Garside M tel que $G \cong G(M)$.*

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monoïdes et groupes de Garside

Le type sphérique

Théorème

Un groupe de Garside possède une solution au problème des mots et est sans torsion.

Proposition

Il existe une puissance de Δ qui est centrale dans $G(M)$.

Démonstration.

Soit $x \in \text{Div}(\Delta)$. Alors $x\Delta^{-1} = (\Delta x^{-1})^{-1} \in \text{Div}(\Delta)^{-1}$, et donc $\Delta x \Delta^{-1} \in \text{Div}(\Delta)$. Ainsi la conjugaison par Δ dans $G(M)$ préserve $\text{Div}(\Delta)$, qui est fini. Il existe donc une puissance k telle que la conjugaison par Δ^k agisse par l'identité sur $\text{Div}(\Delta)$, qui engendre M (et donc $G(M)$). □



- ▶ Le groupe $\mathbb{Z}^n$ est de Garside, avec $M = \mathbb{N}^n$ et $\Delta = (1, 1, \dots, 1)$. On écrit $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ comme fraction irréductible $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$ en posant $\alpha^+ = (\max\{a_i, 0\})_{i=1, \dots, n}$ et $\alpha^- = (\min\{a_i, 0\})_{i=1, \dots, n}$
- ▶ Le groupe B_n est de Garside, avec $M = B_n^+$ et Δ défini précédemment.
- ▶ (Birman-Ko-Lee, Bessis) Il existe un monoïde de Garside alternatif pour B_n , le *monoïde de Birman-Ko-Lee*, ou *monoïde dual*. Il est engendré par une copie de l'ensemble des transpositions de $\mathfrak{S}_n$.
- ▶ (Dehornoy-Paris) Le monoïde $M = \langle x, y \mid x^n = y^m \rangle$, où $m, n \geq 1$, est un monoïde de Garside, avec $\Delta = x^n = y^m$ (central). On a $\text{Div}(\Delta) = \{1, x, \dots, x^{n-1}, y, \dots, y^{m-1}, \Delta\}$. Le groupe $G(M)$ est un groupe de noeud torique lorsque n et m sont premiers entre eux.

Les groupes d'Artin de type sphérique

- ▶ Un groupe d'Artin est de *type sphérique* s'il est associé à un système de Coxeter (W, S) où W est fini.
- ▶ Dans le cas de B_n , le groupe de Coxeter associé est $\mathfrak{S}_n$. La restriction de la projection $B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ aux diviseurs de Δ est une bijection.
- ▶ Les treillis $(\text{Div}(\Delta), \leq_G)$ et $(\text{Div}(\Delta), \leq_D)$ correspondent à deux structures d'ensemble partiellement ordonné bien connues sur $\mathfrak{S}_n$, qui se généralisent à tout groupe de Coxeter : l'ordre de Bruhat faible à gauche et à droite.
- ▶ L'image de Δ dans $\mathfrak{S}_n$ est le plus long élément w_0 de $\mathfrak{S}_n$. Tout groupe de Coxeter *fini* possède un plus long élément pour la longueur par rapport à S .
- ▶ Moralité : la structure de Garside donnée par B_n^+ "relève" à $B_W^+ = B_n^+$ certaines propriétés combinatoires du groupe de Coxeter $W = \mathfrak{S}_n$.

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monômes et groupes de Garside

Le type sphérique

Les groupes d'Artin de type sphérique, II

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monoïdes et groupes de Garside

Le type sphérique

Théorème (Brieskorn-Saito 1972, Deligne 1972)

Soit (W, S) un système de Coxeter avec W fini. Alors B_W^+ est un monoïde de Garside, d'élément de Garside $\Delta = w_0$. En particulier le problème des mots admet une solution dans B_W . De plus, le centre de B_W est cyclique infini engendré par une puissance de Δ .

- Les conjectures mentionnées plus haut sont connues pour certaines familles de groupes d'Artin, mais aucune n'est résolue en toute généralité.

Quid des groupes d'Artin généraux ?

Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

Théorème (Paris, 2002)

Soit (W, S) un système de Coxeter arbitraire. Alors B_W^+ s'injecte dans B_W .

- L'approche de Garside ne se généralise pas en tant que telle à B_W où W est arbitraire (pas d'élément le plus long dans W , pas d'élément de Garside dans B_W^+).
- Le monoïde alternatif de Birman, Ko et Lee pour B_n peut être défini pour un système de Coxeter arbitraire. Il est de Garside lorsque W est fini par les travaux de Bessis (et même lorsque W est un groupe de réflexions complexe bien engendré), et de quasi-Garside pour certains groupes non sphériques : certains W affines (Digne), et les groupes universels (Bessis). Qu'en est-il en général ?

Tresses géométriques

Mots de tresses

L'approche de Garside

Groupes d'Artin

Monoïdes et groupes de Garside

Le type sphérique

Merci de votre attention !